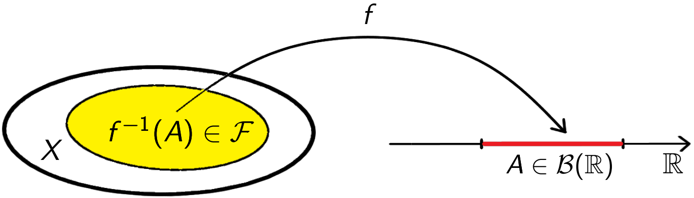
Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 8

Funkcje mierzalne i funkcje proste



Ustalmy przestrzeń mierzalną $(X, \mathcal{F})$.

Def. Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest **mierzalna**, gdy jest $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mierzalna:

$$\forall_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

(czyli, gdy przeciwobraz zbioru borelowskiego jest zbiorem mierzalnym).

Lem. $f : X \to \mathbb{R}$ jest mierzalna $\iff$ zachodzi jeden z warunków

1. $\forall_{a \in \mathbb{Q}} \quad f^{-1}([a, +\infty)) \in \mathcal{F}$
2. $\forall_{a \in \mathbb{Q}} \quad f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{F}$
3. $\forall_{a \in \mathbb{Q}} \quad f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F}$
4. $\forall_{a \in \mathbb{Q}} \quad f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$
5. $\forall_{a,b \in \mathbb{Q}} \quad f^{-1}([a, b)) \in \mathcal{F}$
6. $\forall_{a,b \in \mathbb{Q}} \quad f^{-1}((a, b]) \in \mathcal{F}$
7. $\forall_{a,b \in \mathbb{Q}} \quad f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{F}$
8. $\forall_{a,b \in \mathbb{Q}} \quad f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{F}$

Dowód: „$\Longrightarrow$" bo wszystkie przedziały i półproste są zb. borelowskimi.
„$\Longleftarrow$". (1) Półproste z $\mathcal{G} = \{[a, +\infty) : a \in \mathbb{Q}\}$ generują $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bo

$$\forall_{a,b \in \mathbb{Q}} \qquad [a, b) = [a, +\infty) \setminus [b, +\infty) \in \sigma(\mathcal{G}),$$

a my wiemy, że przedziały $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{Q}$, generują $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zatem $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Czyli f mierzalna na mocy **Lem** z wykładu 7.
„$\Longleftarrow$". (5), (6), (7), (8) Wynika z **Tw** i **Uw** z Wykładu 2. Reszta

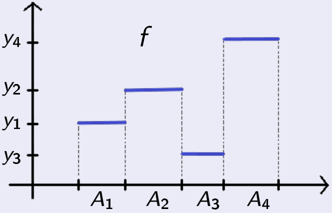
Prz. Funkcja charakterystyczna $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$ zbioru $A \subseteq X$ jest mierzalna $\iff$ A jest mierzalny, tzn. $A \in \mathcal{F}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \implies f^{-1}([a, +\infty)) = \begin{cases} \emptyset, & a > 1 \\ A, & 0 < a \leqslant 1 \\ X, & a \leqslant 0 \end{cases}$$

Def. Funkcję mierzalną $f : X \to \mathbb{R}$ przyjmującą skończoną ilość wartości nazywamy **funkcją prostą**. $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ = zbiór funkcji prostych.

Stw. $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją prostą $\iff$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{1}_{A_i}(x),$$



gdzie $\{y_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ i $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}$.
Ponadto możemy tu założyć, że $\{y_i\}_{i=1}^n$ różne oraz $X = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$.

Dowód: „$\implies$". Niech $f(X) = \{y_1, ..., y_n\}$. Zbiory $A_i := f^{-1}(\{y_i\}) \in \mathcal{F}$, tworzą mierzalne rozbicie X, bo zbiory $\{y_i\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tworzą mierzalne rozbicie $f(X)$. Ponadto wtedy $f(x) = \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$.

„$\Longleftarrow$”. Niech $f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$, gdzie $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}$. Oznaczmy $A^0 := A$ oraz $A^1 := A'$ dla $A \subseteq X$. Dla $\epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n) \in \{0,1\}^n$ zbiory $A_\epsilon := A_1^{\epsilon_1} \cap A_2^{\epsilon_2} \cap ... \cap A_n^{\epsilon_n} \in \mathcal{F}$, tworzą rozbicie mierzalne X oraz

$$f^{-1}([a, +\infty)) = \bigcup\{A_\epsilon : f(x) \geqslant a \text{ dla } x \in A_\epsilon\} \in \mathcal{F}. \quad \blacksquare$$

Stw. Dla $f, g \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy

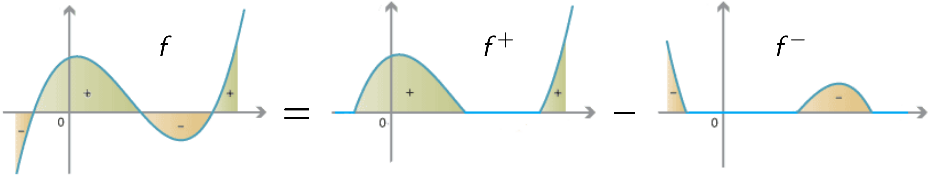
1. $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ *(przestrzeń liniowa)*
2. $f \cdot g \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ *(algebra)*
3. $f \vee g := \max\{f, g\}$, $f \wedge g := \min\{f, g\} \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ *(krata)*

Dowód: Niech $f = \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{A_i}$ i $g = \sum_{j=1}^m z_j \mathbb{1}_{B_j}$, gdzie $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}$ oraz $\{B_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathcal{F}$ rozbicia przestrzeni X. Wtedy $\{A_i \cap B_j\}_{i=1,j=1}^{n,m} \subseteq \mathcal{F}$ mierzalne rozbicie przestrzeni X oraz

$$\alpha f + \beta g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha y_i + \beta z_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \qquad f \cdot g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_i \cdot \beta z_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

$$f \vee g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \max\{y_i, z_j\} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \qquad f \wedge g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \min\{y_i, z_j\} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

Zatem są to wszystko funkcje proste $\blacksquare$



Def. Część dodatnia i część ujemna funkcji $f : X \to \mathbb{R}$

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{jeśli } f(x) > 0 \\ 0, & \text{jeśli } f(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x), & \text{jeśli } f(x) < 0 \\ 0, & \text{jeśli } f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Uw. Funkcje f^+, f^- są jednoznacznie wyznaczone przez relacje

$$f = f^+ - f^-, \qquad f^+,\ f^- \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad f^+ \cdot f^- = 0.$$

Ponadto, $|f| = f^+ + f^-$.

Wn. $f \in \mathcal{E}(\mathcal{F}) \Longrightarrow f^+,\ f^-,\ |f| \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$

Dowód: $f^+ = f \vee 0$, $f^- = -f \wedge 0 \in \mathcal{E}(\mathcal{F}) \overset{\text{Stw}}{\Longrightarrow} |f| = f^+ + f^- \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$ ∎

Tw. Każda funkcja mierzalna $f : X \to \mathbb{R}$ jest granicą punktową ciągu funkcji prostych, tzn. istnieje $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ taki, że

$$\forall_{x \in X} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Jeśli $f \geqslant 0$, to $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ można wybrać tak, by $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \ldots$, czyli $f_n \nearrow f$ i wtedy $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.

Dowód: (krok 1) Załóżmy, że $f \geqslant 0$. Dzielimy odcinek $[0, n)$ na $n2^n$ równych części i rozważmy ich przeciwobrazy:

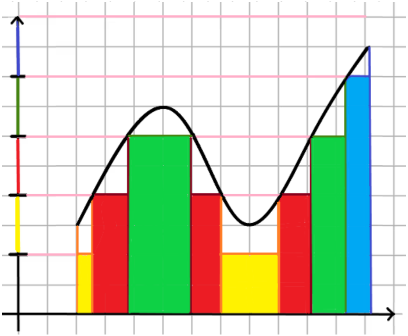
$$A_k^n := f^{-1}([\tfrac{k}{2^n}, \tfrac{k+1}{2^n})) \in \mathcal{F}$$

dla $k = 0, \ldots, n2^n - 1$ oraz

$$A_{n2^n}^n := f^{-1}([n, +\infty)) \in \mathcal{F}$$

Zdefiniujmy

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{A_k^n}$$



Wtedy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ oraz $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}$ dla $x \in f^{-1}([0, n))$. Ponadto $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \ldots$. Czyli $f_n \nearrow f$.

(krok 2) Jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ dowolna mierzalna, to $f = f^+ - f^-$ gdzie $f^+, f^- \geqslant 0$ mierzalne Na mocy **(krok 1)** istnieją $\{f_n^+\}_{n=1}^{\infty}, \{f_n^-\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ takie, że $f_n^+ \nearrow f^+$ oraz $f_n^- \nearrow f^-$. Zatem kładąc $f_n := f_n^+ - f_n^-$ mamy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ oraz

$$\forall_{x \in X} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^+(x) - \lim_{n\to\infty} f_n^-(x) = f^+(x) - f^-(x) = f(x). \qquad \blacksquare$$

Stw. Jeżeli $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcje mierzalne, to funkcje

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n$$

są mierzalne (o ile przyjmują wartości skończone). W szczególności, granica punktowa $\lim_{n\to\infty} f_n$, jeśli istnieje, to jest funkcją mierzalną.

Uw. $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} f_k(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} f_k(x)$ (granica dolna)

$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} f_k(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} f_k(x)$ (granica górna)

Ponadto $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ istnieje $\iff \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$

Dowód: Na mocy **Uw** wystarczy pokazać, że $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ oraz $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ mierzalne. Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned}(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)^{-1}([a,+\infty)) &= \{x \in X : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \geqslant a\} \\ &= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{x \in X : f_n(x) \geqslant a - \frac{1}{k}\}}_{\in\mathcal{F}} \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Zatem $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n : X \to \mathbb{R}$ mierzalna. Skoro $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\sup_{n\in\mathbb{N}}(-f_n)$, to wynika stąd również, że $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n : X \to \mathbb{R}$ mierzalna. ■

Ozn. $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ zbiór funkcji mierzalnych $f : X \to \mathbb{R}$.

Wn. $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ jest domknięciem $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ w topologii zbieżności punktowej, tzn. funkcja jest mierzalna $\iff$ jest granicą punktową funkcji prostych.

Wn. Dla $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy

1. $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ *(przestrzeń liniowa)*
2. $f \cdot g \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ *(algebra)*
3. $f \vee g := \max\{f, g\}$, $f \wedge g := \min\{f, g\} \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ *(krata)*

Dowód: Na mocy **Tw** istnieją $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ takie, że $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ oraz $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$. Zatem

$$\alpha f + \beta g = \lim_{n\to\infty} \alpha f_n + \beta g_n \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$$

jako granica ciągu funkcji mierzalnych $\{\alpha f_n + \beta g_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$;

$$f \cdot g = \lim_{n\to\infty} f_n \cdot g_n \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$$

jako granica ciągu funkcji mierzalnych $\{f_n \cdot g_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$.
Natomiast $f \vee g := \max\{f, g\}$, $f \wedge g := \min\{f, g\} \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$ bezpośrednio ze **Stw**. ■